

ANALYSE 5 - INTÉGRATION

1 Propriétés de l'intégrale

Propriétés (Propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann).

Si f est une fonction réelle **continue** sur un **segment** $[a, b]$, avec $a \leq b$, le nombre $\int_a^b f$, également noté $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_{[a,b]} f$ est défini comme une limite d'intégrales de fonctions en escalier (voir document).

De cette définition découlent les propriétés suivantes, vérifiées pour tous $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- **Intégrale d'une constante** : $\int_a^b \lambda dt = (b - a) \cdot \lambda$
- **Linéarité** : $\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
- **Relation de Chasles** : si $c \in [a, b]$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- **Positivité et croissance** : si $\forall t \in [a, b], f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f \geq 0$,
et donc si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Cf exo 1, A_n, B_n, C_n

Ces propriétés élémentaires suffisent à démontrer les trois résultats suivants :

- **Inégalité triangulaire** : Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
- Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est une fonction **positive**, alors on a l'implication :

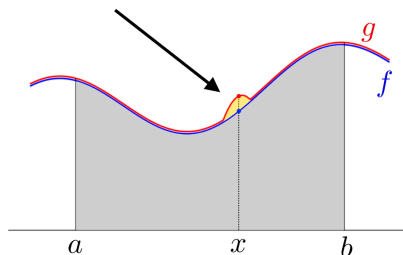
$$\left(\int_a^b f = 0 \right) \implies (f = 0) \quad (\text{c'est-à-dire } \forall t \in [a, b], f(t) = 0)$$

Une autre façon d'énoncer cette propriété (par contraposée) est la suivante :

$$\left(\begin{array}{c} f \geq 0 \text{ sur } [a, b] \\ \text{et} \\ \exists x \in [a, b] \text{ tq } f(x) > 0 \end{array} \right) \implies \left(\int_a^b f > 0 \right)$$

- **"Croissance stricte" de l'intégrale** (conséquence de la propriété précédente) : si $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b])$, avec $a < b$, on a l'implication suivante :

$$\left(\begin{array}{c} f \leq g \text{ sur } [a, b] \\ \text{et} \\ \exists x \in [a, b] \text{ tq } f(x) < g(x) \end{array} \right) \implies \left(\int_a^b f < \int_a^b g \right)$$



Cf exo 2

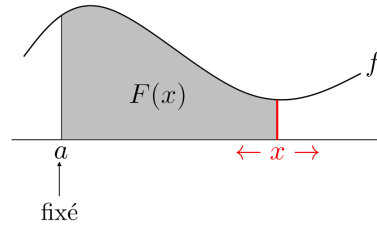
Définition (Intégrales "à rebours"). Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. On définit la quantité $\int_b^a f$ par $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Remarques. Cela permet de généraliser la relation de Chasles : $\forall a, b, c \in I, \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. En revanche, la positivité, la croissance et l'inégalité triangulaire ne sont plus vérifiées.

2 Intégrales et primitives

Théorème. Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.

La fonction $F : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f \end{pmatrix}$ est $\mathcal{C}^1$, et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.



Conséquences :

- Toute fonction continue sur I admet des primitives, qui diffèrent entre elles d'une constante additive.
- Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.
- Si f est $\mathcal{C}^1$ sur I , alors $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.
- Formule d'intégration par parties.
- Formule du changement de variable.

Quelques propriétés peu surprenantes :

- Si f est une fonction (continue) **impaire** sur $[-a, a]$ (où $a \in \mathbb{R}_+$), alors $\int_{-a}^a f = 0$.
- Si f est une fonction (continue) **paire** sur $[-a, a]$ (où $a \in \mathbb{R}_+$), alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.
- Si f est une fonction (continue) **T -périodique** sur $\mathbb{R}$, alors son intégrale est la même sur tous les intervalles de longueur T : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f$.

3 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange).

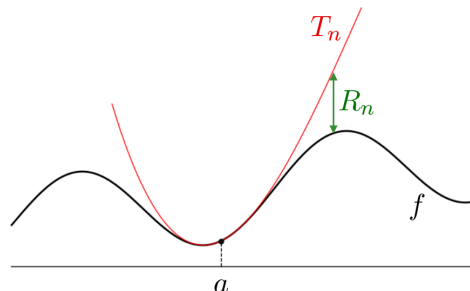
Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle, et $a \in I$ fixé. Si on note T_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (\text{la partie régulière du } DL_n(a))$$

Alors pour tout $x \in I$, le "reste" de l'approximation de Taylor $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ vérifie :

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

où $M_{n+1} := \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$. (La fonction $f^{(n+1)}$ est continue, donc ce sup existe, et est atteint.)

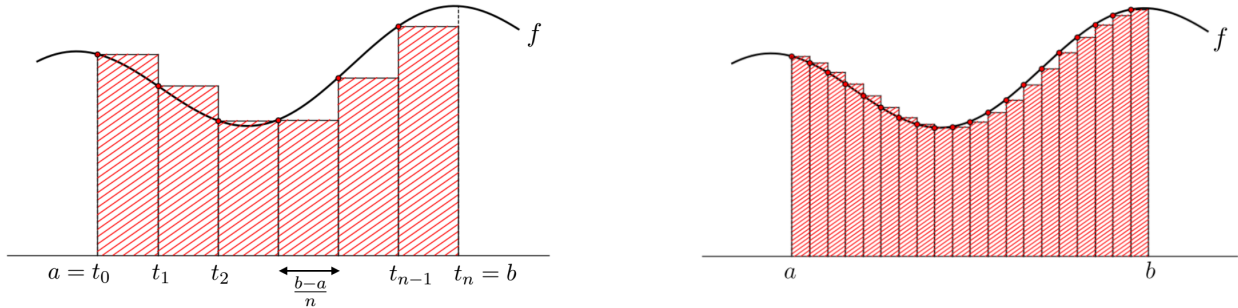


4 Sommes de Riemann

Théorème (Convergence des sommes de Riemann). Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, alors la quantité

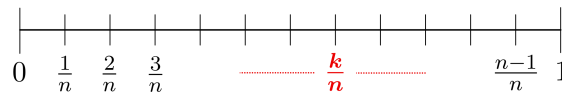
$$S_n := \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)}_{\text{estimateur de la méthode des rectangles}} \quad \text{où } t_k := a + k \left(\frac{b-a}{n} \right),$$

converge vers $\int_a^b f$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.



Remarque. **LE** cas particulier utilisé en pratique : $[a, b] = [0, 1]$.

Dans ce cas, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $t_k = \frac{k}{n}$



et le théorème devient :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$$

Cf exo 9

5 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Rappels : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, alors, pour tout $(a, b) \in I^2$, le nombre complexe $\int_a^b f$ est défini par

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

La formule d'intégration d'une constante, la linéarité et la relation de Chasles sont vérifiées (simples vérifications), mais la positivité et la croissance n'ont aucun sens. En revanche, on dispose toujours de

l'inégalité triangulaire : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$

Conséquences : avec les mêmes démonstrations, on montre pour les fonctions continues à valeurs complexes : le lien intégrale-dérivée, les formules d'intégration par parties et du changement de variable, l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Remarque. On a de plus l'IAF suivante si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$: si $|f'|$ est bornée par $M \geq 0$, on a $\forall x, y \in I$ tels que $x \leq y$:

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \int_x^y |f'(t)| dt \leq \int_x^y M dt \leq M |y - x|$$

6 Synthèse des formules de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction n fois dérivable au voisinage de a .
On note T_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

c'est-à-dire le polynôme posé de façon que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$.

On note $R_n : x \mapsto f(x) - T_n(x)$ le "reste", c'est-à-dire la différence entre f et son polynôme de Taylor, de sorte que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Toutes les formules de Taylor servent à estimer ce reste.

► **Formule de Taylor-Young** : si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de a , alors lorsque $x \rightarrow a$:

$$R_n(x) = o((x-a)^n)$$

► **Formule de Taylor** : si f est polynomiale, de degré inférieur à n , alors :

$$R_n = 0$$

► **Inégalité de Taylor-Lagrange** : si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors pour tout $x \in I$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \quad \text{où} \quad M_{n+1} := \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$$

► **Formule de Taylor avec reste intégral** (HORS PROGRAMME, voir démonstration en annexe) :
si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors pour tout $x \in I$:

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On voit que pour une fonction $\mathcal{C}^{n+1}$, on a :

$$(\text{T- reste intégral}) \xRightarrow{I_1} (\text{Ineg. T-Lagrange}) \xRightarrow{I_2} \begin{cases} \text{(Taylor version polynômes)} \\ \text{et} \\ \text{(T-Young)} \end{cases}$$

En effet :

• Pour l'implication I_1 on majore :

$$|R_n(x)| \leq \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!} \underbrace{|f^{(n+1)}(t)|}_{\leq M_{n+1}} dt = \frac{M_{n+1}}{n!} \underbrace{\int_a^x |x-t|^n dt}_{= \frac{1}{n+1} |x-a|^{n+1}} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

• Pour I_2 :

(a) si f est polynomiale de degré $\leq n$, alors $f^{(n+1)} = 0$;

(b) $|x-a|^{n+1} = |x-a|^n \times \underbrace{|x-a|}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} = o(|x-a|^n)$.

Intégration : les démonstrations

Propriétés.

- **Inégalité triangulaire** : Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
- Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est une fonction **positive**, alors on a l'implication :

$$\left(\int_a^b f = 0 \right) \implies (f = 0) \quad (\text{c'est-à-dire } \forall t \in [a, b], f(t) = 0)$$

- **"Croissance stricte" de l'intégrale** (conséquence de la propriété précédente) : si $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b])$, avec $a < b$, on a l'implication suivante :

$$\left(\begin{array}{c} f \leq g \text{ sur } [a, b] \\ \text{et} \\ \exists x \in [a, b] \text{ tq } f(x) < g(x) \end{array} \right) \implies \left(\int_a^b f < \int_a^b g \right)$$

Démonstration.

- Selon son signe $\left| \int_a^b f \right|$ vaut $\int_a^b f$ ou $-\int_a^b f = \int_a^b -f$
- Or $f \leq |f|$ donc $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ et $-f \leq |f|$ donc $\int_a^b -f \leq \int_a^b |f|$.
- Finalement, $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
- Par l'absurde, supposons $f \neq 0$ c'est-à-dire : il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.
Comme f est continue en x_0 : $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0)$. Ainsi il existe un voisinage $V_{x_0} = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ tel que $\forall t \in V_{x_0}, f(t) \geq \frac{f(x_0)}{2}$.
- Donc $\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{x_0-\eta} f}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f}_{\geq 2\eta \frac{f(x_0)}{2}} + \underbrace{\int_{x_0+\eta}^b f}_{\geq 0}$
- $\geq \eta f(x_0) > 0$ donc $\int_a^b f \neq 0$ contradiction.
- Par contraposition de la propriété précédente, si f est non nulle et positive alors $\int_a^b f > 0$.
- On applique ce résultat à $g - f$.

□

Théorème. Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.

La fonction $F : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f \end{pmatrix}$ est $\mathcal{C}^1$, et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Démonstration. Fixons $x \in I$. On regarde l'accroissement :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) \stackrel{\text{Chasles}}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f$$

f est continue en x , donc on peut écrire que $\forall t \in I, f(t) = f(x) + \alpha(t)$, où α est une fonction telle que $\alpha(t) \xrightarrow[t \rightarrow x]{} 0$.

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(x) + \alpha(t)) dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt}_{A(h)} + \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \alpha(t) dt}_{R(h)} \end{aligned}$$

Le nombre $f(x)$ ne dépend pas de t , donc $A(h) = \frac{1}{h} \times h \times f(x) = f(x)$.

Reste donc à montrer que $R(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. On revient pour cela à la définition de la limite. Fixons $\varepsilon > 0$.

Comme $\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow x} 0$, il existe un voisinage de $x : V_x = [x - \eta, x + \eta]$ tel que $\forall t \in V_x, |\alpha(t)| \leq \varepsilon$. Donc si $h \in [-\eta, \eta]$, on a

$$\begin{aligned} |R(h)| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \alpha(t) dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{[x, x+h]} |\alpha(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[x, x+h]} \varepsilon dt = \frac{1}{|h|} \times |h| \times \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Cela prouve bien que $R(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Finalement, on a montré que $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$, c-à-d que F est dérivable en x et que $F'(x) = f(x)$.

Ce raisonnement étant valable pour tout $x \in I$, on a donc bien que F est dérivable, et que $F' = f$. A posteriori, F' est continue (puisque f est continue), donc F est bien de classe $\mathcal{C}^1$. $\square$

Théorème (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle, et $a \in I$ fixé. Si on note T_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (\text{la partie régulière du } DL_n(a))$$

Alors pour tout $x \in I$:

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

où $M_{n+1} := \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$. (La fonction $f^{(n+1)}$ est continue, donc ce sup existe, et est atteint.)

Démonstration. Fixons $x \in I$.

Le polynôme de Taylor T_n est posé de façon que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, T_n^{(p)}(a) = f^{(p)}(a)$.

Posons la fonction : $R : t \mapsto f(t) - T_n(t)$ (la fonction à borner).

Elle vérifie donc :

$$\begin{cases} \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, R^{(p)}(a) = 0 & (*) \\ R^{(n+1)} = f^{(n+1)} & \text{car } T_n \text{ est de degré } \leq n. \end{cases}$$

Une conséquence de (*) est que $R^{(p)}(t)$ s'obtient en intégrant $R^{(p+1)}$ entre a et t , car :

$$\int_a^t R^{(p+1)}(s) ds = [R^{(p)}(s)]_a^t = R^{(p)}(t) - \underbrace{R^{(p)}(a)}_{=0} = R^{(p)}(t)$$

On part donc de : $\forall t \in [a, x]$:

$$|R^{(n+1)}(t)| \leq M_{n+1} \quad \text{vrai car } R^{(n+1)} = f^{(n+1)}$$

et on intègre $n+1$ fois jusqu'à obtenir $R(t)$:

► **1ère fois** : $\forall t \in [a, x]$

$$|R^{(n)}(t)| = \left| \int_a^t R^{(n+1)}(s) ds \right| \leq \int_{[a, t]} |R^{(n+1)}(s)| ds \leq \int_{[a, t]} M_{n+1} ds = M_{n+1} |t-a|$$

► **Puis** : $\forall t \in [a, x]$

$$|R^{(n-1)}(t)| = \left| \int_a^t R^{(n)}(s) ds \right| \leq \int_{[a, t]} |R^{(n)}(s)| ds \leq \int_{[a, t]} M_{n+1} |s-a| ds = M_{n+1} \frac{|t-a|^2}{2}$$

► **Puis** : $\forall t \in [a, x]$

$$|R^{(n-2)}(t)| = \left| \int_a^t R^{(n-1)}(s) ds \right| \leq \int_{[a,t]} |R^{(n-1)}(s)| ds \leq \int_{[a,t]} M_{n+1} \frac{|s-a|^2}{2} ds = M_{n+1} \frac{|t-a|^3}{3!}$$

et par récurrence finie, $\forall t \in [a, x]$:

$$|R(t)| = \left| \int_a^t R'(s) ds \right| \leq \int_{[a,t]} |R'(s)| ds \leq \int_{[a,t]} M_{n+1} \frac{|s-a|^n}{n!} ds = M_{n+1} \frac{|t-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

On applique enfin cette inégalité : $|R(t)| \leq \frac{|t-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$ à $t = x$. □

Théorème (Convergence des sommes de Riemann). *Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, alors la quantité*

$$\underbrace{S_n := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)}_{\text{estimateur de la méthode des rectangles}} \quad \text{où } t_k := a + k \left(\frac{b-a}{n} \right),$$

converge vers $\int_a^b f$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. La démonstration du cas général est hors-programme. Traitons le cas où la fonction f est lipschitzienne. Supposons donc que f soit M -lipschitzienne pour un certain $M \in \mathbb{R}^+$ (c'est le cas si f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $M = \sup_{[a,b]} |f'|$ d'après l'IAF).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Alors :

$$|f(t) - f(t_k)| \leq M|t - t_k| \leq M \frac{b-a}{n}.$$

Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale des fonctions réelles :

$$\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(t) - f(t_k)) dt \right| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t) - f(t_k)| dt \leq M \frac{b-a}{n} (t_{k+1} - t_k) \leq M \frac{(b-a)^2}{n^2}.$$

Finalement

$$\left| \int_a^b f(t) dt - S_n \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(t) - f(t_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t) - f(t_k)| dt$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{(b-a)^2}{n^2} = M \frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par comparaison : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$. □

Propriété (Inégalité triangulaire, cas complexe).

Si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$. On suppose que $a \leq b$. Alors

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Démonstration. Le cas $a = b$ étant évident, on peut supposer $a < b$.

► Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f = \left| \int_a^b f \right| e^{i\theta}$.

Par linéarité de l'intégrale, $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b e^{-i\theta} f$.

► Par passage à la partie réelle dans cette égalité et définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, on obtient :

$$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f).$$

► Enfin on a $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq |e^{-i\theta} f| = |f|$ donc par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

□

Avant de démontrer la formule de Taylor-Young, on va commencer par démontrer le résultat suivant énoncé lors du cours sur l'analyse asymptotique :

Théorème ("Primitive" d'un DL).

Si une fonction continue f admet un $DL_n(a)$:

$$f(a+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$$

alors toute primitive F de f admet le DL d'ordre $n+1$ en a suivant :

$$F(a+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F(a) + \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + \lambda_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration. Quitte à faire une translation, on peut supposer $a = 0$.

► Commençons par traiter le cas où $f(x) = o(x^n)$ et où F est la primitive de f qui s'annule en 0.

Montrons qu'on a alors $F(x) = o(x^{n+1})$, ce qui montrera que F admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est nulle.

Par hypothèse, il existe une fonction u tendant vers 0 telle que $\forall x \in I, f(x) = x^n u(x)$.

Par la formule du crochet, on a :

$$\forall x \in I \quad F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t^n u(t) dt.$$

Soit $x \in I$, en effectuant le changement de variable $t = xs$, on obtient

$$F(x) = \int_0^1 x^n s^n u(sx) x ds = x^{n+1} \underbrace{\int_0^1 s^n u(sx) ds}_{J(x)}.$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $J(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_0 u = 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [-\eta, \eta] \quad |u(t)| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in [-\eta, \eta]$, pour tout $s \in [0, 1]$, on a $|sx| \leq \eta$ donc $|u(sx)| \leq \varepsilon$, ce qui donne :

$$|J(x)| \leq \int_0^1 |s^n u(sx)| ds \leq \int_0^1 \varepsilon ds = \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

► Cas général : Comme le développement de f à l'ordre n en 0 s'écrit :

$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$, alors en notant g la fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$, on a $g(x) = o(x^n)$.

Soit F une primitive de f , on vérifie facilement que la fonction :

$$x \mapsto F(x) - F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{k+1} x^{k+1}$$

est la primitive de g qui s'annule en 0.

On utilise le cas particulier précédent pour conclure.

□

Théorème (Formule de Taylor-Young). *Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur le voisinage V_a d'un point a (voisinage contenant a), alors f admet un $DL_n(a)$ donné par la formule suivante :*

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration. Quitte à faire une translation, on démontre le résultat pour $a = 0$.

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n : \quad \forall f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

► **Initialisation** : Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. La continuité de f en 0 s'exprime ainsi : $f(x) = f(0) + o(1)$; c'est la formule de Taylor-Young à l'ordre 0.

► **Hérédité** : Supposons H_n vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et prouvons H_{n+1} .

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. On a alors $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et donc d'après H_n , la fonction f' possède un développement limité à l'ordre n en 0 qui s'écrit :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Par primitivation, f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1}),$$

ce qui est la formule de Taylor-Young à l'ordre $n+1$, c'est-à-dire H_{n+1} .

► **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie. □

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral, HORS PROGRAMME). *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle, et $a \in I$ fixé. On note T_n le polynôme de Taylor de f en a , à l'ordre n . Alors pour tout $x \in I$:*

$$f(x) - T_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (\mathcal{H}(n))$$

Démonstration. On fixe $x \in I$ et on prouve $\mathcal{H}(p)$ par récurrence sur $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

— Initialisation : $\mathcal{H}(0)$ signifie $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$, ce qui est vrai.

— Hérédité : soit $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{H}(p)$. On sait que :

$$T_{p+1}(x) = T_p(x) + \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} (x-a)^{p+1}$$

Donc pour obtenir $\mathcal{H}(p+1)$, tout revient à montrer :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt = \frac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!} (x-a)^{p+1} + \int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+2)}(t) dt$$

Or, on obtient cela avec l'IPP :
$$\begin{cases} u(t) = f^{(p+1)}(t) & ; & u'(t) = f^{(p+2)}(t) \\ v'(t) = \frac{(x-t)^p}{p!} & ; & v(t) = -\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} \end{cases}$$

— Conclusion : $\mathcal{H}(p)$ est vraie pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et donc en particulier pour $p = n$. □